



# تفکیک کسر به زبون آدمیزاد

هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد



برای دانلود جدیدترین نسخه این جزوه، روی عمار نانولرن لمس کنید

مهندس مجتبی احمدی

## آقا تفکیک کسر اصلا چیه؟

تفکیک کسر یعنی یه کسر بزرگ و پیچیده رو تبدیل کنیم به چند تا کسر کوچیکتر که راحتتر بتونیم باهاشون کار کنیم ✂️

یه جورایی مثل قاچ کردن یه پیتزا می‌مونه، که نمی‌تونن یهویی همشو بخوری، پس خوردش می‌کنی تا راحتتر بزنی به بدن 😊👉

## به چه دردی می‌خوره؟

وقتی می‌خواهی از یک کسر انتگرال بگیری، سخت نیست؟ خب می‌ایم این کسر رو می‌شکنیم تا کارمون آسون بشه.

یا مثلا وقتی می‌خواهی یه ضریب، جمع چیزهای روی یک کسر انجام بدی، به عمه طراحی سوال فحش نمیدی؟ 😊

تو جزوه "دیفرانسیل به زبون آدمیزاد" اگه خونده باشی، موقع لاپلاس معکوس گرفتن از کسر ها دهنمون سرویس میشد، خب این تفکیک

کسر اینجا به درد موند می‌خوره...

تو این جزوه قراره هرچی ترفند و تریک داره بهت بگم تا دندون مسلح بشی حاجی! پس بزنی بریم که جوک بگیریم...

عامل درجه اول غیر تکراری (با توان یک) مثل  $x - 1$  یعنی کلا  $ax + b$

عامل درجه اول تکراری (با توان بزرگتر از یک) مثال  $(x - 1)^3$  یعنی کلا  $(ax + b)^n$

عامل درجه دوم (غیر قابل تجزیه) غیر تکراری مثل  $x^2 + 3$  یا کلا  $ax^2 + bx + c$

عامل درجه دوم تکراری مثل  $(x^2 + 1)^3$  یا کلا  $(ax^2 + bx + c)^n$

انواع تفکیک کسر بر اساس مخرج



تفکیک کسر درد یه سالاعت!

خب داستان چیه؟ تو بالاخره به یکی از چهار مدل مخرج بالا تو کسر بر می‌خوری، حالا می‌خواهیم ببینیم چجوری کسی که این مدل مخرج هارو

داره یه جوری بشکنیمش و تفکیکش کنیم.

## حالت اول) عامل درجه اول غیر تکراری (با توان یک) مثل $x - 1$ یعنی کلاً $ax + b$

تو این حالت باید به ازای هر کدوم از اینا یه دونه  $\frac{A}{ax+b}$  بزاری! بعدش بیای A رو پیدا کنی و تموم!

مثلاً اینارو ببین، یکی شون واضحه داستان، دومی هم تو مخرج وقتی از X فاکتور بگیری می‌بینی باز هم همین حالت (پس حواست باشه ممکنه نیاز به

فاکتور گیری باشه، از روی ظاهر قضاوت نکن)

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)} \rightarrow \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x+2}{x^2+x} \rightarrow \frac{x+2}{x(x+1)} \rightarrow \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

## 🤔 حالا چجوری این A و B رو پیدا کنیم؟

برای حالتی که فقط دو تا کسر داری، اول میای ضربدری ضرب شون می‌کنی، مثال اول رو ببین، اینجوری میشه:  $A(x-2) + B(x-1)$

اینو مساوی صورت اولی میزاری:  $A(x-2) + B(x-1) = 2$

حالا X رو هر دفعه چیزی بزاری که یکی شونو کلاً حذف کنه تا اون یکی رو گیر بیاری:

$$x = 2 \rightarrow A(2-2) + B(2-1) = 2 \rightarrow B = 2$$

$$x = 1 \rightarrow A(1-2) + B(1-1) = 2 \rightarrow A = -2$$

## مثلاً) این کسر رو برام تفکیک کن $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} \xrightarrow{\text{تفکیک به A و B}} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \xrightarrow{\text{صورت قبلی = ضرب ضربدری}} A(x-3) + B(x-2) = 1$$

$$x \text{ رو هر دفعه چیزی میزاری که یکی شونو کلاً حذف کنه} \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \rightarrow A(3-3) + B(3-2) = 1 \rightarrow B = 1 \\ x = 2 \rightarrow A(2-3) + B(2-2) = 1 \rightarrow A = -1 \end{array} \right.$$

$$\text{پس شد} \rightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)} \rightarrow -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

حالا از کجا بفهمم درست‌ه؟ مطمئنم که این همون کسر هستش که تفکیک شده؟

کاری نداره که، بیا جمع شون کن دیگه یعنی مثل بچگی هامون بیا مخرج مشترک بگیر تا مطمئن بشی، نگاه کن:

$$-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{-1(x-3) + 1(x-2)}{(x-2)(x-3)} \xrightarrow{\text{بازکردن پرانتزها}} \frac{-x+3+x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} \text{ همون شد دیدی؟}$$

## مثلاً) اینو برام تفکیک کن $\frac{x+2}{x^2+x}$

$$\frac{x+2}{x^2+x} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \frac{x+2}{x(x+1)} \xrightarrow{\text{تفکیک به } A \text{ و } B} \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \xrightarrow{\text{صورت قبلی = ضرب ضربدری}} A(x+1) + B(x) = x+2$$

$$x = -1 \rightarrow A(-1+1) + B(-1) = -1+2 \rightarrow B = -1$$

$$x = 0 \rightarrow A(0+1) + B(0) = 0+2 \rightarrow A = 2$$

$$\text{پس شد} \rightarrow \frac{x+2}{x^2+x} \rightarrow \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}$$

حالا برای حالتی که بیشتر از دو تا جمله داریم (مثلا سه تایی اند)، مثل قبل برو جلو ولی مرحله آخر چون نمیتونی چیزی بزاری که یکی رو صفر کنه، پس بیا

پرانتهز هارو باز کن و بر اساس توان X ها تفکیک شون کن و ضرایب شون رو مساوی بزار، مثال پایینو ببین خودت میفهمی 🙌

**(مثلا) حالا که دستت گرم شد بیا اینو تفکیک کن**

$$\frac{x}{x(x-1)(x-3)} \xrightarrow{\text{تفکیک به } A \text{ و } B \text{ و } C} \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3} \xrightarrow{\text{صورت قبلی = ضرب ضربدری}} A(x-1)(x-3) + B(x)(x-3) + C(x)(x-3) = x$$

$$\xrightarrow{\text{باز کردن پرانتزها}} Ax^2 - 4Ax + 3A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 3Cx = x$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک بر اساس } x} (A+B+C)x^2 + (-4A+3A-3C)x + 3A = x$$

بر اساس توان X ها چپ و راست رو مساوی بزار

مثلا سمت راست  $x^2$  نداره پس ضریب اش سمت چپ صفر

یا مثلا سمت راست X داره با ضریب یک دیگه، پس سمت

چپ ضریب X باید یک باشه

$$\text{ضریب اعداد } 3A = 0 \rightarrow A = 0$$

$$\text{ضریب } x \quad -4A + 3A - 3C = 1 \rightarrow -A - 3C = 1 \rightarrow -3C = 1 \rightarrow C = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ضریب } x^2 \quad A + B + C = 0 \rightarrow 0 + B - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$\text{پس شد} \rightarrow \frac{x}{x(x-1)(x-3)} \rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x-3}$$

این روش همه جا جواب میده ولی روش قبلی فقط وقتی جواب میده که بخوای فقط به دو تا کسر تبدیل کنی، گرفتی چی میگم؟

الان تو این سوال از پایین اومدم اول A رو پیدا کردم بعد رفتم بالای C رو پیدا کردم و بعدش B

👉 باور کن اصلا سخت نیست، چون پارتتر نداشته ات جلو نرو تا همینجا رو به دور دیگه بخون بعد برو جلو 🙌

**(مثلا) بیا اینم تفکیک کن دیگه تموم بشه**

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2-1)}$$

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 - 1)} \xrightarrow{\text{تفکیک به } A \text{ و } B \text{ و } C} \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \xrightarrow{\text{صورت قبلی = ضرب ضربدری}} A(x-1)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-1) = x^2 + x - 1$$

$$\xrightarrow{\text{باز کردن پرانتزها}} Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx = x^2 + x - 1$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک بر اساس } x} (A + B + C)x^2 + (B - C)x - A = x^2 + x - 1$$

$$-A = -1 \rightarrow A = 1$$

$$B - C = 1 \rightarrow B = 1 + C \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$A + B + C = 1 \rightarrow 1 + 1 + C + C = 1 \rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پس شد} \rightarrow \frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 - 1)} \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$$

**این حالت اول رو چجوری تشخیص بدم که بخوام این مدلی تفکیک اش کنم؟**

خیلی ساده مخرج اش هرچی که هست، اون **X اش توان دو نداره فقط توان یک داره**، اگر هم شد اول مخرج رو تجزیه کن بعد ببین توان دو داره یا نه! **چرا؟** چون تو همین قبلی تو نگاه اول مخرج X ای داشت که توان دو داشت ولی وقتی تجزیه اش کردیم به دو تا کسر (مزدوج بود دیگه) دیدیم همه X ها توان شون یک بود، پس اینجا میگی با همین روش باید حلش کنم.

**حالت دوم) عامل درجه اول تکراری (با توان بزرگتر از یک) مثال  $(x-1)^3$  یعنی کلا  $(ax+b)^n$**

تو مخرج اش اینو دیدی، میای به تعداد n تا از توان یک تا توان n کسر میسازی...

$$\frac{1}{(x+5)(x-1)^3} \rightarrow \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

**چیشد؟** خب اون  $(x+5)$  که X اش توان یک داره پس خودش رو مثل همون حالت اول میاریم، ولی  $(x-1)$  توانش سه هستش پس خودش رو می نویسی و از توان یک تا سه همینجوری کسر میسازی...

خب برای پیدا کردن  $A, B, C, \dots$  هم قبلا یاد گرفتی چیکار کنی دیگه؟ یادت رفته برو دوباره بالا رو بخون...



حساس نشو، کلا چهار حالته مشتقی 😊

مثلاً) اینو تفکیک کن  $\frac{1}{x(x-3)^2}$

$$\frac{1}{(x-3)^2} \xrightarrow{\text{تفکیک به } A \text{ و } B \text{ و } C} \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \xrightarrow{\text{صورت قبلی = ضرب ضربدری}} A(x-3)^2 + B(x)(x-3) + C(x) = 1$$

$$\xrightarrow{\text{باز کردن پرانتزها}} Ax^2 - 6Ax + 9A + Bx^2 - 3Bx + Cx = 1$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک بر اساس } x} (A+B)x^2 + (-6A-3B+C)x + 9A = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ضرب اعداد} \quad 9A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{9} \\ \text{ضرب } x \quad -6A - 3B + C = 0 \xrightarrow{A=\frac{1}{9}} C = \frac{2}{3} + 3B \\ \text{ضرب } x^2 \quad A + B = 0 \xrightarrow{A=\frac{1}{9}} B = -\frac{1}{9} \xrightarrow{C=\frac{2}{3}+3B} C = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{پس شد} \rightarrow \frac{1}{x(x-3)^2} \rightarrow \frac{1}{9} + \frac{-1}{9} + \frac{1}{3}$$



**ضرب ضربدری رو چجوری انجام دادی؟** داستان سر مخرج مشترکه، معمولاً مخرج مشترک رو همیشه از ضرب همه مخرج ها به دست آورد به خاطر همین تا اینجا همه سوال اینجوری حل میشد که صورتش رو تو مخرج بقیه ضرب می کردی؛ اما اگه بشه مخرج مشترک ساده تری هم پیدا کرد خب اون تو اولویت مونه دیگه. اینجا دیدیم آقا  $x(x-3)^2$  میتونه مخرج مشترک باشه، چون دومی رو هم شامل میشه (منظورم مخرج B هستش)

خب حالا دونه دونه می بینیم هر کسر چی کم داره! مثلاً کسر اول مخرج اش X رو داره پس فقط  $(x-3)^2$  رو کم داره پس ضربش می کنیم.

حالا کسر دومی چی کم داره که به اون مخرج مشترکه برسه؟ معلومه یه دونه X و یه دونه  $(x-3)$  که به توان دو برسه و همون مخرج مشترک رو بسازه.

کسر سومی هم همون مخرج مشترک رو داره فقط چی کم داره؟ آفرین X

خب نمیشد مثل همیشه هر صورت رو تو دوتای مخرج اون یکی ها ضرب کنیم؟ چرا همیشه ولی کار خودت پیچیده تر میشه 😊

مثلاً) اینم تفکیک کن بره پی کارش  $\frac{x-1}{x(x-1)^2}$

$$\frac{x-1}{x(x-1)^2} \xrightarrow{\text{تفکیک به } A \text{ و } B \text{ و } C} \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \xrightarrow{\text{صورت قبلی = ضرب ضربدری}} A(x-1)^2 + B(x)(x-1) + C(x) = x-1$$

$$\xrightarrow{\text{باز کردن پرانتزها}} Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx = x-1$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک بر اساس } x} (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A = x-1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اعداد } A = -1 \rightarrow A = -1 \\ \text{ضریب } x \quad -2A - B + C = 1 \xrightarrow{A=-1} B = C + 1 \\ \text{ضریب } x^2 \quad A + B = 0 \xrightarrow{A=-1} B = 1 \xrightarrow{B=C+1} C = 0 \end{array} \right.$$

پس شد  $\rightarrow \frac{x-1}{x(x-1)^2} \rightarrow \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$

استاد اینو ساده تر هم میشد تفکیک کسر کرد؟ آره عزیزم همون اول صورت و مخرج رو میتونی ساده کنی 😊😊

پس چرا این همه راه اومدیم؟ چون هدف این بود روش تفکیک رو یاد بگیری همین... 😊

**حالت سوم** عامل درجه دوم (غیر قابل تجزیه) غیر تکراری مثل  $x^2 + 3$  یا  $ax^2 + bx + c$

با دو تا مثال بهت میگم، اینجا رو ببین :

$$\frac{1}{x(x^2 - 10)} \rightarrow \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 10}$$

ببین اون X که هیچی خودش میاد مثل قبل، یعنی حالت اول، اون یکی چون توان دو داره ولی همیشه به چیزی تجزیه اش کرد، پس خودش

رو می نویسی و تو صورتش یه درجه پایین تر رو می نویسی.

$$\frac{1}{x^2(x^3 + 4)} \rightarrow \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^3 + 4}$$

خب اینجا اون ایکس که توان دو داره رو می بینی؟ اون قابل تجزیه است پس مثل حالت دوم رفتار می کنه، یعنی از توان یک شروع می کنی تا

توان خودش یعنی دو می نویسی میای جلو، اما اون که تو پرانتزه رو همیشه تجزیه اش کرد (یعنی همیشه از چیزی رو فاکتور بگیری) پس

میای خودش رو می نویسی و صورتش رو یک درجه پایین تر می نویسی.

**استاد یه درجه پایین تر یعنی چی؟** خیلی ساده است یعنی مثلا مخرج ات توان 3 داشت، باید تو صورت X با توان 2 بنویسی.

**حالا شکل کلی شون چجوریه؟** اینو یه بار برای همیشه یادت باشه دیگه از دبیرستان خوندی :

حالت کلی درجه 1:  $Ax + B$

حالت کلی درجه 2:  $Ax^2 + Bx + C$

حالت کلی درجه 3:  $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

مثلا) اینو تفکیک کن ببینم  $\frac{x}{x^2(x^2+1)}$

$$\frac{x}{x^2(x^2+1)} \xrightarrow{\text{تفکیک به } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ و } D} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \xrightarrow{\text{صورت قبلی = ضرب ضربدری}} A(x^2)(x^2+1) + B(x)(x^2+1) + (Cx+D)(x)(x^2) = x$$

$$\xrightarrow{\text{باز کردن پرانتزها}} Ax^4 + Ax^2 + Bx^3 + Bx + Cx^4 + Dx^3 = x$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک بر اساس } x} (A+C)x^4 + (B+D)x^3 + (A)x^2 + (B)x = x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ضریب } x \quad B = 1 \\ \text{ضریب } x^2 \quad A = 0 \\ \text{ضریب } x^3 \quad B + D = 0 \xrightarrow{B=1} D = -1 \\ \text{ضریب } x^4 \quad A + C = 0 \xrightarrow{A=0} C = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{پس شد} \rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

**حالت چهارم** عامل درجه دوم تکراری مثل  $(x^2+1)^3$  یا کلاً  $(ax^2+bx+c)^n$

این در واقع ترکیبی از حالت دوم و سوم هستش، یعنی مخرج هم قابل تجزیه نیست، هم توان داره، اینجا دیگه معلومه چون قابل تجزیه نیست پس

خودش رو مینویسی و صورتش رو یه درجه پایین تر می نویسی؛ از طرفی چون توان داره از توان یک شروع می کنی تا توان خودش همیتجوری ادامه

میدی... اینجا رو نگاه کن دورت بگردم :

$$\frac{1}{(x^2-1)^3} \rightarrow \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{(x^2-1)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2-1)^3}$$

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} \rightarrow \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + \frac{Dx^2+Ex+F}{(x^3+1)^2}$$

خب دیدی؟ تو اولی مخرج قابل تجزیه نیست، پس باید خودش رو بنویسی و تو صورت یه درجه کمتر، چون خودش درجه دو هستش، پس صورت درجه

یک میشه. چون توان داره پرانتزش، پس از توان یک شروع می کنی تا توان خودش جلو میری...

تو دومی درجه مخرج سه هستش پس صورت باید درجه دو باشه از یک هم شروع می کنی تا توان اون پرانتزش میری جلو...

حالا یه دونه ترکیبی بدم صفا کنی :

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-1)(x^2+1)(x^2-1)^2} \rightarrow \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)(x+1)} + \frac{Cx+D}{x^2-1} + \frac{Ex+F}{x^2-1} + \frac{Gx+H}{(x^2-1)^2}$$

حالت اول      حالت دوم      حالت سوم      حالت چهارم



مثلاً) برای آخرین مثال اینو برام تجزیه کن  $\frac{x+1}{x(x^2+2)^2}$

$$\frac{x+1}{x(x^2+2)^2} \xrightarrow{\text{تفکیک به } A, B, C, \dots} \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2} \xrightarrow{\text{صورت قبلی = ضرب ضربدری}} A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x)(x^2+2) + (Dx+E)(x) = x+1$$

$$\xrightarrow{\text{باز کردن پرانتزها}} Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^4 + 2Bx^2 + Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + Ex = x + 1$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک بر اساس } x} (A+B)x^4 + (C)x^3 + (4A+2B+D)x^2 + (2C+E)x + 4A = x + 1$$

$$4A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$2C + E = 1 \rightarrow E = 1 - 2C$$

$$4A + 2B + D = 0 \xrightarrow{A=\frac{1}{4}} D = -1 - 2B$$

$$C = 0 \xrightarrow{E=1-2C} E = 1$$

$$A + B = 0 \xrightarrow{A=\frac{1}{4}} B = -\frac{1}{4}, D = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پس شد} \rightarrow \frac{x+1}{x(x^2+2)^2} \rightarrow \frac{1}{4x} + \frac{-\frac{x}{4}}{x^2+2} + \frac{-\frac{1}{2}x+1}{(x^2+2)^2}$$

تو حالت سوم حواست باشه که اون عبارت درجه دومه نباید بتونه به درجه یک تجزیه بشه، مثلاً الان این  $x^2 + 3x - 10$  تو حالت سوم نیست! چرا؟ چون میتونیم با اتحاد جمله مشترک تجزیه اش کنیم به درجه یک اینجوری :

$$x^2 + 3x - 10 \rightarrow (x+5)(x-2)$$

این الان حالت اول حساب میشه، گرفتی چی میگم؟

خب دقت کرده باشی کلاً عبارت های  $x^2 + a^2$  قابل تجزیه نیستند پس همون حالت سوم حساب میشن، ولی یادت باشی جیگر، عبارت های  $x^2 - a^2$  با اتحاد مزدوج به درجه یک تبدیل میشن، اینجوری :


$$x^2 - a^2 \rightarrow (x-a)(x+a)$$

این شد بازم حالت اول

پس همین دو تا اتحاد "مزدوج" و "جمله مشترک" رو یادت باشه تو تله نمیفی! خیالت راحت...

اصلاً میخوای یه کوچولو حرفه ای تر بشی؟ لطفاً اگه نمیخوای اینجا رو نبین 

اگه مخرج معادله درجه دو بود، دلتا گرفتی و دلتاش منفی شد اون قابل تجزیه نیست

اگه دلتا مثبت شد اون قابل تجزیه است؛ به همین خفنی!!!! 

دنبال این مدل جزوه ها می گردی؟ عضو کانال نانو لرن شو و رایگان جزوه هاشونو دانلود کن

👉 برای دانلود هر کدوم از جزوه های زیر روش لمس کن 👉

